

## **ТАКТИКА ДЕЙСТВИЙ В ПРОТИВОРЕЧИВЫХ УСЛОВИЯХ – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РАВНОВЕСИЯ**

**Вл. Д. Мазуров**

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической экономики Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург*

### **Две тактики**

Принятие решений как правило проходит в противоречивых условиях, при системе несовместных критериев и ограничений. Примеров этого много в экономике, в военном деле, в изобретательстве и других отраслях. И возникает вечный вопрос: Что делать? – Это, как известно, и первый российский вопрос. Когда есть несколько ограничений и критериев эффективности действий, то спрашивается, как следует адекватно действовать – поступать средне, более или менее удовлетворяя всем условиям, или оптимизировать частичные ситуации блок за блоком? Мы стремимся к равновесию, но равновесие в классическом смысле часто недостижимо. И поэтому приходится ослаблять критерии равновесия. Далее, модель решений часто ориентирована на использование группы экспертов – формального консилиума, комитета<sup>187</sup>. В реальной практике консилиумов интегрированное решение зависит от многих трудно-уловимых факторов.

Комитеты (формальные консилиумы) появляются в прикладной математике как ассоциативные машины, затем как нейронные сети. Речь идет о согласовании мнений, признаков, решений. О выборе проектов, о ранжировании специалистов. В этом случае надо согласовывать мнения отдельных лиц, вырабатывать коллективные решения. Как согласовать решения по многим критериям, по многим условиям, когда все в совокупности условия несовместны? Как согласовывать решения многих лиц? Какие правила согласований допустимы? Как вырабатывать экспертные решения. И какой выбор справедлив? В общем виде речь идет о преобразовании индивидуальных данных в интегрированные данные.

Итак, есть две тактики. Можно действовать средне, минимизируя сразу все невязки – отклонения от выполнения условий, то – есть минимизируя максимальную из невязок. А можно действовать циклически, подтягивая к допустимому состоянию последовательно

<sup>187</sup> Мазуров Вл. Д. О комитете системы выпуклых неравенств // Труды ИСМ – 1966. М.: МГУ, 1966. № 14. С. 41.

подсистему за подсистемой исходной системы условий. И потом проходить обратно по циклу.

Тактика, часто проигрышная: пытаться оптимизировать сразу все системы. На самом деле, надо улучшать сначала одну подсистему ограничений и критериев, потом другую, и так далее. Надо также учитывать различие интересов.

Каковы достоинства и недостатки двух тактик?

Вторая тактика (действовать циклически) – более гибкая. В ней нулевые невязки какого либо условия появляются только на некоторое время. Потом обнуляются невязки другой подсистемы условий и так далее.

Первая тактика (действовать средне) более привычна. И ее одобряют консерваторы. Но в ней обязательно во все моменты времени имеются ненулевые невязки по многим условиям.

Каково формальное обоснование второй тактики? Имеется точно установленный факт: коллективное ранжирование (в том числе и по нескольким показателям) некорректно, а коллективная диагностика корректна. Это две теоремы:

1. Теорема Эрроу о невозможности: не существует универсальной демократии, кроме диктатуры, при ранжировании вариантов решений.

2. Теорема Мазурова о возможности: если свести проблему к последовательности классификаций или диагностик, то универсальные правила принятия коллективных решений возможны. Это теорема о существовании комитетов.

Выход в этом «хождении по лезвию бритвы» может быть найден также в динамическом принятии решений. В частности, в циклической тактике. Но как все будет формально обосновано в динамике?

### **Динамика коллективных решений в противоречивых условиях**

Коллективный выбор<sup>188</sup> в политике часто связан с голосованием. В экономике он сочетается также с рыночными механизмами. Деньги делают варианты решений одномерными, и здесь важно, что механизмы голосования делают процессы принятия решений менее плоскими. Соссюр предложил модель компромисса в проблеме приблизительного сходства.

Но важно еще отметить, что демократия – это процесс. Поэтому модели принятия решений, вообще говоря, зависят от некоторого параметра  $t$ . Рассмотрим (возможно, несовместную при многих  $t$ ) систему, моделирующую задачу выбора:

$$f_j(t, x) < b_j \quad (j = 1, \dots, m), \quad t \in T. \quad (1)$$

<sup>188</sup> Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256 с.

Пусть  $C(t)$  – комитет системы (1) при данном  $t$ . Комитет – такая последовательность  $C$ , что каждому неравенству удовлетворяют более половины элементов из  $C$ . Тогда любое неравенство из (1) при каждом фиксированном  $t$  выполняется для большинства элементов из  $C$ . Как правило, комитет состоит из решений максимальных по включению совместных подсистем (МСП). Это верно для минимальных комитетов. Когда МСП эволюционирует по некоторым законам, то, как правило, по тем же законам эволюционирует решение МСП.

Для случая аффинных неравенств, зависящих от параметра  $t$ , справедливо следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА:** Если при каждом  $t$  любая пара неравенств в системе (1) совместна, то существует нетривиальная коллективная динамика.

Доказательство – непосредственное следствие из основной теоремы существования комитетов<sup>189</sup>.

Далее рассмотрим применение этого аппарата к квалиметрии:

1. «Квалиметрия» означает измерение качества. В моделировании объектов и явлений важны и количественные, и качественные измерения. Обоснование измерений – фундаментальная проблема. Измерения являются предметом таких наук как эконометрика и биометрика. В математике обосновываются методы квалиметрии. Есть метрология, есть математическая теория измерений. Качественные измерения – предмет распознавания образов. При этом исходят из значений признаков. Признаки – это свойства объектов и явлений, их характерные черты или особенности.

В математике изучаются различные метрики<sup>190</sup>. Абстрактное понятие метрического пространства ввел в 1906 г. французский математик Морис Фреше. Немецкий математик Феликс Хаусдорф в 1914 г. начал изучение топологического и метрического пространств.

В изучении явлений используются наблюдения и измерения. Поэтому необходимо изучение шкал, процедур измерения, кодирования и управления в шкалах<sup>191</sup>. Особое место в приложениях квалиметрии принадлежит социологии и психологии<sup>192</sup>, так как в этих областях приходится учитывать неформальные признаки объектов и ситуаций.

2. В квалиметрии фиксируются инварианты описаний объектов и явлений.

<sup>189</sup> См. подробнее: Мазуров Вл. Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990. 248 с.

<sup>190</sup> Деза Е., Деза М. Энциклопедический словарь расстояний. М.: Наука, 2008. 444 с.

<sup>191</sup> Новиков Н. Ю. Теория шкал. М.: Физматлит, 2009. 504 с.

<sup>192</sup> См., например: Михеев В. И. Моделирование и методы теории измерений в педагогике. М.: КомКнига, 2006.

Пусть факторное пространство  $R_n$  содержит объекты  $m$  классов, причем  $p$ -й класс описывается множеством  $D_p \subset R_n$ . Необходимое условие разделимости классов:

$$D_i \cap D_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Инвариантом разделения в общем случае служит класс разделяющих функций, достаточный для разделения с данной точностью. Таким образом, содержательной задаче ставится в соответствие некоторый класс функций. В лучшем случае – одна функция, принимающая различные значения на объектах различных классов.

Типичный пример – построение дискриминантной функции для патологий разной степени тяжести:

$$f_i(x) \in [a_i, b_i] \text{ для } x \in D_i, f_i \in F.$$

В данном случае инвариант – класс  $F$ .

В случае комитетных конструкций инвариантом является пара  $[F; q]$ , где фиксируется класс функций и число членов комитета. Здесь комитет – это последовательность элементов – такая, что каждому соотношению изучаемой модели удовлетворяет более половины членов комитета.

## **Математический структурализм**

В свое время (1960–1970) в философском и математическом структурализме были обнаружены как конструктивные возможности, так и ограничивающие положения. В России большую роль сыграла книга Н. С. Автономовой, посвященная концепциям французского структурализма. Впрочем, истоки структурализма – более старые. Например, Ф. Клейну принадлежит изложение раздела алгебраических инвариантов в математике, в том числе в классификации различных видов геометрий. В наше время В. Г. Лабунцу удалось использовать эти идеи для рассказа о реальном, перцептивном и концептуальном пространствах в связи с распознаванием образов. Ю. И. Журавлев открыл роль алгебраического подхода в распознавании, Вл. Д. Мазуров развил концепции систем линейных неравенств для анализа структур дискриминантного анализа, таксономии и анализа признаков в задачах распознавания. Н. Бурбаки последовательно построил общую теорию, использующую структурный подход в математических дисциплинах, начиная с теории множеств.

В гуманитарных науках кроме традиционного ассоциативно-го подхода также есть и структурализм. Истоки его – в работах

русских ученых – Н. С. Трубецкого, Р. О. Якобсона и П. Н. Савицкого. Структурализм служит основой точных методов в психологии и социологии. Он является основой и метрологии.

В структуралистской традиции предполагается, что существуют виртуальные ситуации или проекты, более реальные, чем эмпирически существующие объекты или явления. Э. Нетер доказала, что симметрия в некотором смысле эквивалентна равновесию. Мы можем видеть различные симметрии, равнозначные целостности объектов; они существуют даже более реально, чем эмпирические объекты.

**Итог.** Есть термин «неразрешимости», есть книга Т. Х. Керимова<sup>193</sup> на эту тему. Мы рассматриваем это явление (неразрешимость) с математической точки зрения. Неразрешимость можно вычислить логически, для этого есть инконсистентная логика. Вообще, надо использовать более широкую логику, чем аристотелевскую. Множество неразрешимостей дает множество вариантов обобщенных (слабых) разрешимостей.

## ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ДОПУЩЕНИЯ ЯЗЫКОВ ЛОГИКИ

**А. Г. Кислов**

*кандидат философских наук, заведующий кафедрой онтологии и теории познания Департамента философии Института социальных и политических наук Уральского федерального университета имени первого Президента России*

*Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург*

Доказательство – <...> рассуждение на основе предвидения.

*Псевдо-Платон «Определения», 414 с<sup>194</sup>.*

Конструирование искусственных языков и выяснение содержащихся в них онтологических допущений является хорошим средством изучения проблем онтологии.

*Смирнов В. А. «Логические методы анализа научного знания»<sup>195</sup>.*

### 1.

В настоящее время остается актуальной потребность в пересмотре традиционных (теоретико-познавательных) взглядов на логические

<sup>193</sup> Керимов Т. Х. Неразрешимости. М.: Академический проект, 2007. 218 с.

<sup>194</sup> См.: Платон. Диалоги / Пер. С. Я. Шейнман-Топштейн. М.: Мысль, 1986. 605 с.

<sup>195</sup> Смирнов В. А. Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. С. 133.